

MATEMATIKA 2

Lekcija 2- Određeni integral

Integralna suma. Neka je $[a, b]$ jedan zatvoreni interval. Skup tačaka $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, takav da je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, zovemo podelom intervala $[a, b]$. Sa Δx_k označimo $x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Pod parametrom, dijametrom ili normom podele Π podrazumevaćemo $\lambda(\Pi) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$.

U svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$, uzmimo po jednu tačku c_k . Niz tih tačaka označimo sa $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Na taj način se dobija podela sa istaknutim tačkama (Π, c) intervala $[a, b]$.

Podelu $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervala $[a, b]$ zovemo regularnom ako je $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ za $k = \overline{1, n}$. Za takvu podelu je $\lambda(\Pi) = \frac{b-a}{n}$. Pošto je inače $\frac{b-a}{\lambda(\Pi)} \leq n$ za svaku podelu $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervala $[a, b]$, to $n \rightarrow +\infty$ ako $\lambda(\Pi) \rightarrow 0$. Da obrnuto nije tačno pokazuje podela $\Pi = \{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$ intervala $[0, 1]$. Za nju je $\lambda(\Pi) = \frac{1}{2}$, pa $\lambda(\Pi)$ ne teži nuli kad $n \rightarrow +\infty$.

Neka funkcija $f(x)$ preslikava interval $[a, b]$ u \mathbb{R} i neka je (Π, c) podela sa istaknutim tačkama intervala $[a, b]$. Zbir

$$S(f, \Pi, c) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

zovemo integralnom sumom funkcije $f(x)$ za datu podelu (Π, c) sa istaknutim tačkama.

Definicija određenog integrala. Za broj I kažemo da je granična vrednost integralne sume $S(f, \Pi, c)$ funkcije $f(x)$ koja preslikava $[a, b]$ u \mathbb{R} kad $\lambda(\Pi) \rightarrow 0$ i zapisujemo

$$\lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S(f, \Pi, c) = I,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svaku podelu s istaknutim tačkama (Π, c) važi nejednakost

$$|S(f, \Pi, c) - I| < \varepsilon \text{ kad god je } \lambda(\Pi) < \delta.$$

Ako $\lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S(f, \Pi, c)$ postoji, onda se kaže da je funkcija $f(x)$ integrabilna u Rimanovom smislu na $[a, b]$. Broj $I = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S(f, \Pi, c)$ zove se Ri-

manov ili određeni integral funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ i zapisuje

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Brojevi a i b su donja i gornja granica, a funkcija $f(x)$ je podintegralna funkcija ili integrand određenog integrala.

Ako je $f(x)$ integrabilna funkcija na intervalu $[b, a]$ ($a > b$), tada se $\int_a^b f(x) dx$ definiše kao $-\int_b^a f(x) dx$. Sem toga, po definiciji je $\int_a^a f(x) dx = 0$ za svaki realni broj a i svaku funkciju f definisanu (bar) u tački a .

Postoje i funkcije koje nisu integrabilne. Tako, na primer, ako je funkcija $f(x)$ definisana na $[a, b]$ i važi $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$, tada u prvom podintervalu $[x_0, x_1]$ bilo koje podele Π , za svako $M > 0$ postoji c_1 takvo da važi

$$f(c_1) \Delta x_1 > M,$$

te ne postoji $\lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$. To znači da funkcija f nije integrabilna. Ustvari, važi sledeća teorema.

Teorema. Integrabilna funkcija na $[a, b]$ je ograničena na $[a, b]$. Svaka neprekidna funkcija na $[a, b]$ je integrabilna na $[a, b]$. Monotona funkcija na $[a, b]$ je integrabilna na $[a, b]$. Ograničena funkcija na $[a, b]$ sa konačnim brojem tačaka prekida je integrabilna na $[a, b]$.

Osobine određenog integrala:

1⁰. Ako je funkcija $f(x)$ konstantna, tj. $f(x) = C$, $x \in [a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx = C(b - a).$$

2⁰. Ako je $f(x)$ integrabilna funkcija na $[a, b]$, i k neki realan broj, tada je i funkcija $kf(x)$ integrabilna na $[a, b]$ i važi

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

3⁰. Ako su dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na $[a, b]$, tada su i njihov zbir, razlika i proizvod takođe integrabilne funkcije na $[a, b]$. Ako je, još, i

funkcija $\frac{1}{g(x)}$ ograničena na $[a, b]$, tada je količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ takođe integrabilna funkcija na $[a, b]$.

4⁰. Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

5⁰. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalima $[a, c]$ i $[c, b]$, takvim da je $a < c < b$, tada je funkcija $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$ i važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6⁰ Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$.

(i) Tada je funkcija $|f(x)|$ takođe integrabilna na $[a, b]$ i važi

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(ii) Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna i nenegativna (resp. nepozitivna) na $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \left(\text{resp.} \quad \int_a^b f(x) dx \leq 0 \right).$$

(iii) Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na $[a, b]$, i $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(Dokaz — na vežbama AG).

Osnovna teorema integralnog računa

Prva teorema o srednjoj vrednosti. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$, tada postoji tačka $c \in [a, b]$ takva da važi

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Dokaz. Ako je $f(x)$ konstantna funkcija, dokaz je trivijalan i sledi iz 1⁰. Ako, međutim, vrednost funkcije $f(x)$ nije konstantna na $[a, b]$ tada funkcija $f(x)$ zbog neprekidnosti dostiže na $[a, b]$ minimum m i maksimum M , tj., postoje tačke c_1 i c_2 takve da važi $f(c_1) = m$ i $f(c_2) = M$, što znači da je tada $m \leq f(x) \leq M$. Na osnovu 6⁰ (iii) važi

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

odakle je $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, odnosno $f(c_1) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq f(c_2)$. Kako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$, ona uzima sve vrednosti na tom intervalu između $f(c_1)$ i $f(c_2)$. To znači da postoji $c \in [c_1, c_2]$ ili $c \in [c_2, c_1]$, takvo da je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Dokaz je završen.

Broj c i u ovom slučaju nije jednoznačno određen, kao što nije bio ni kod Rolove ili Lagranžove teoreme. Ako je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, tada prva teorema o srednjoj vrednosti ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Naime, u tom slučaju površina pravougaonika čija je jedna stranica jednaka $b-a$ (dužina intervala $[a, b]$), a druga stranica jednaka $f(c)$, jednaka je površini krivolinijskog trapeza ispod grafika funkcije f nad segmentom $[a, b]$.

Prva teorema je, ustvari, jedan specijalni slučaj sledeće teoreme.

Druga teorema o srednjoj vrednosti. Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne na $[a, b]$ i neka je funkcija $g(x)$ stalnog znaka na $[a, b]$. Tada postoji tačka $c \in [a, b]$, takva da je

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Važna posledica teorema o srednjoj vrednosti jeste:

Prva osnovna teorema. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$, tada je funkcija $G(x)$, definisana sa

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

primitivna funkcija za funkciju $f(x)$, tj. za svako $x \in [a, b]$ važi $G'(x) = f(x)$.

Dokaz. Neka su x i $x + \Delta x$ iz $[a, b]$, i $\Delta x \neq 0$. Po definiciji prvog izvoda je

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Na osnovu prve teoreme o srednjoj vrednosti, postoji tačka c iz intervala $[x, x + \Delta x]$ takva da važi

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = [(x + \Delta x) - x] \cdot f(c) = \Delta x \cdot f(c).$$

Prelaskom na graničnu vrednost dobijamo

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x f(c)}{\Delta x} = f\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c\right) = f(x),$$

jer je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački x .

Druga osnovna teorema (Njutn-Lajbnicova formula). Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$, a $F(x)$ jedna njena primitivna funkcija na $[a, b]$, tj.

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Tada važi:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b.$$

Dokaz. Neka je $F(x)$ proizvoljna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ i neka je $G(x)$ funkcija data relacijom

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Pošto se dve primitivne funkcije za istu funkciju mogu najviše razlikovati za konstantu, to je

$$G(x) - F(x) = C, \quad \text{odnosno} \quad \int_a^x f(t) dt = F(x) + C,$$

za svako $x \in [a, b]$. Kako je očigledno

$$G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C, \text{ to je } F(a) = -C.$$

Iz prethodnog sledi

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

Primeri.

1. Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, onda je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right). \end{aligned}$$

(Dokaz — na vežbama AG).

2. Na osnovu jedne od formula u prethodnom primeru izračunati integrale

$$\textbf{a)} \int_{-1}^1 x^2 dx; \textbf{b)} \int_0^\pi \sin x dx; \textbf{c)} \int_{-1}^1 e^x dx.$$

(Rad na vežbama.)

3. Izračunajmo integrale iz primera 2:

Rešenje. Jedna primitivna funkcija funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ je $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Zato je, prema Njutn-Lajbnicovoj formuli,

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

Na sličan način je

$$\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)|_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$$

i

$$\int_{-1}^1 e^x dx = e^x|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = \frac{e^2 - 1}{e}.$$